

Nama : Mohammad Febryan Khamim
NRP : 5002221072

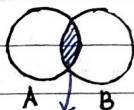
ANALISIS I (F)

► Exercise 1.1

3. Jika A dan B adalah himpunan, tunjukkan bahwa $A \subseteq B$ jika dan hanya jika $A \cap B = A$.

$$A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$$

($\Rightarrow$). Jelas bahwa $A \cap B \subseteq A$, karena



pasti $A \cap B \subseteq A$

Karena $A \subseteq B$ dan $A \subseteq A$, maka pastilah $A \subseteq A \cap B$.

Di awal kita telah tahu bahwa $A \cap B \subseteq A$, kita telah memperoleh juga bahwa $A \subseteq A \cap B$.

Sesuai teorema $A = B; B \subseteq A$, maka $A = B$.

Terbukti bahwa $A \cap B = A$

($\Leftarrow$). Akan dibuktikan $A \cap B = A$ maka $A \subseteq B$.

Dari teorema yang menyatakan $A \subseteq B; B \subseteq A$, maka $A = B$, diperoleh bahwa $A \cap B \subseteq A$ dan $A \subseteq A \cap B$.

Ambil $x \in A$, pastilah $x \in A$ dan $x \in B$ (sesuai prinsip irisan himpunan). Maka dari itu, diperoleh $A \subseteq B$.

Karena telah terbukti dua arah:

$\therefore A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$ [TERBUKTI]

7. $\forall n \in \mathbb{N}$, anggap $A_n = \{(n+1)k, k \in \mathbb{N}\}$

(a). Apa $A_1 \cap A_2$?

(b). Tentukan Himpunan $\bigcup \{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ dan $\bigcap \{A_n : n \in \mathbb{N}\}$

Jawab:

$$\begin{aligned} (a). A_1 \cap A_2 &= \{(1+1)k, k \in \mathbb{N}\} \cap \{(2+1)k, k \in \mathbb{N}\} \\ &= \{2 \cdot 3k, k \in \mathbb{N}\} \\ &= \{6k, k \in \mathbb{N}\} \\ &= A_5 \end{aligned}$$

(b).

$$\bigcup \{A_n : n \in \mathbb{N}\} = \{x \mid (x \in \mathbb{N} \setminus \{1\})\}$$

(karena semua bilangan normal memenuhi, kecuali 1. Pada $\mathbb{N}$, 1 bukan termasuk anggota di himpunan tersebut, begitupun seterusnya).

$$\bigcap \{A_n : n \in \mathbb{N}\} = \dots$$

Pada irisan A_{n+1} dan A_n , pasti akan ada anggota yang tidak masuk irisan. Pada $A_{n+1} \cap A_n$, maka bilangan $< n(n+1)$ tak masuk irisan. Sehingga,

$$\bigcap \{A_n : n \in \mathbb{N}\} = \emptyset$$

10). Anggap $f(x) := 1/x^2, x \neq 0, x \in \mathbb{R}$

(a). Tentukan direct image $f(E), E := \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x \leq 2\}$

$$f(1) = 1$$

$$f(2) = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$

$$f(E) = \{x \in \mathbb{R}, \frac{1}{4} \leq x \leq 1\}$$

(b). Tentukan inverse image $f^{-1}(G), G := \{x \in \mathbb{R}, 1 \leq x \leq 4\}$

$$f(x) = 1/x^2$$

$$1 \leq x \leq 4$$

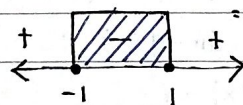
maka untuk menentukan asal, kita substitusi $f(x)$.

$$1 \leq \frac{1}{x^2} \leq 4$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^2} \geq 1 \rightarrow x^2 \leq 1$$

$$= x^2 - 1 \leq 0$$

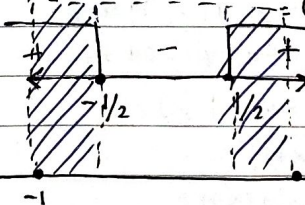
$$= (x+1)(x-1) \leq 0$$



$$\Rightarrow \frac{1}{x^2} \leq 4 \rightarrow x^2 \geq \frac{1}{4}$$

$$= x^2 - \frac{1}{4} \geq 0$$

$$= (x + \frac{1}{2})(x - \frac{1}{2}) \geq 0$$



$$-1 \leq x \leq -1/2 \vee$$

$$\frac{1}{2} \leq x \leq 1$$

$$\text{Jawab: } f^{-1}(G) = [-1, -\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}, 1]$$

14. Tunjukkan jika $f : A \rightarrow B$ dan E, F subsets dari A , maka $f(E \cup F) = f(E) \cup f(F)$ dan $f(E \cap F) \subseteq f(E) \cap f(F)$

Jawab = Ambil $y \in f(E \cup F)$, maka akan ada $x \in E \cup F$. Sedemikian hingga $f(x) = y$.

Karena sesuai dengan teorema bahwa apabila ada $x \in E \cup F$, maka $x \in E \vee x \in F$.

Jadi $y = f(x) \in f(E) \vee y = f(x) \in f(F)$

Sehingga, $y \in f(E) \cup f(F)$

= Terbukti $f(E \cup F) = f(E) \cup f(F)$

Ambil sebarang $x \in E \cap F$, maka akan ada $y \in f(E \cap F)$. Sedemikian hingga $f(x) = y$

Sesuai teorema yang menyatakan bila ada

$x \in A \cap x \in B$, maka $x \in A \cap B$,

Sehingga y anggota $f(A) \cap f(B)$

Diperoleh simpulan, karena $y \in f(E \cap F)$

maka $f(E \cap F) \subseteq f(E) \cap f(F)$

► Exercise 1.2

3). Buktikan $3 + 11 + \dots + (8n-5) = 4n^2 - n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\begin{array}{l|l} \text{L} \rightarrow P(1) = 4(1) - 1 & P(2) = 4(2)^2 - 2 \\ = 3 \quad \checkmark & = 14 \quad \checkmark \end{array}$$

① $P(1)$ benar $\rightarrow P(1) = 3 \quad \checkmark$

② Anggap $P(k)$ benar

$$P(k) = 4(k)^2 - k = 3 + 11 + \dots + (8k-5)$$

③ Uji apakah $P(k+1)$ benar

$$P(k+1) = 3 + 11 + \dots + (8(k+1)-5) = 4(k+1)^2 - (k+1)$$

$$\Rightarrow 3 + 11 + \dots + (8k-5) + (8(k+1)-5) = 4(k^2 + 2k + 1) - (k+1)$$

$$3 + 11 + \dots + (8k-5) + (8(k+1)-5) = 4k^2 + 8k + 4 - k - 1$$

$$\text{benar} = 4k^2 - k$$

$$4k^2 - k + (8(k+1)-5) = 4k^2 - k + 8k + 4 - 1$$

$$= 4k^2 - k + 8k + 3$$

$$= 4k^2 + 7k + 3$$

$$4k^2 - k + (8(k+1)-5) = 4(k+1)^2 - (k+1)$$

misal $k+1 = p$

Dapat ditulis $(k+1) = p$ andaikan, maka:

$$3 + 11 + \dots + (8p-5) = 4p^2 - p$$

maka Terbukti

7). Buktikan $5^{2n} - 1$ divisible oleh 8 $\forall n \in \mathbb{N}$

① $P(1)$ benar $\rightarrow 5^2 - 1 = 25 - 1$

$$= 24 \quad (\text{Habis dibagi 8})$$

② $P(k)$ anggap benar $\rightarrow 5^{2k} - 1$

③ Uji apakah $p(k+1)$ benar?

$$\rightarrow 5^{2(k+1)} - 1$$

$$= 5^{2k} \cdot 5^2 - 1$$

$$= 5^{2k} \cdot 5^2 - 1 - 24 + 24$$

$$= 5^{2k} \cdot 5^2 - 25 + 24$$

$$= 25(5^{2k} - 1) + 24$$

anggap 8. (karena sudah terbukti benar)
(atau habis dibagi 8)

$$= 25 \cdot 8p + 24$$

$$= 25 \cdot 8p + 8 \cdot 3$$

$$= 8[25p + 3]$$

↑

Terbukti habis dibagi 8. Jadi terbukti bahwa

$$5^{2n} - 1 \text{ habis dibagi } 8 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

18. (a). Berikan Contoh dua fungsi f, g pada $\mathbb{R}$ ke $\mathbb{R}$ sehingga $f \neq g$, tetapi $f \circ g = g \circ f$

Contoh : $f(x) = x$ dan $g(x) = \frac{1}{x}$

$$f(x) = x \quad g(x) = \frac{1}{x}$$

$$f(g(x)) = \frac{1}{x} \quad g(f(x)) = \frac{1}{x}$$

[Terbukti]

(b). Contoh 3 fungsi f, g, h , pada $\mathbb{R}$,
hingga $f \circ (g+h) \neq f \circ g + f \circ h$

$$f(x) = 4x^2 \quad g(x) = x \quad h(x) = 1$$

$$f \circ (g+h) = 4(x+1)^2$$

$$= 4(x^2 + 2x + 1)$$

$$f \circ g + f \circ h = 4(x)^2 + 4(1)^2$$

$$= 4x^2 + 4$$

[Terbukti] $\rightarrow f \circ (g+h) \neq f \circ g + f \circ h$

13. Buktikan $n < 2^n \forall n \in \mathbb{N}$	② Asumsikan $P(k)$ benar
① Buktikan $P(1)$ benar $1 < 2$ (Jelas benar)	$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{k}$
② Anggap /asumsikan $P(k)$ benar $k < 2^k$	③ Buktikan $P(k+1)$ benar
③ Buktikan $P(k+1)$ benar $k+1 < 2^{k+1}$	$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} > \sqrt{k+1}$
$k+1 < 2^k \cdot 2$	$\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} > \sqrt{k+1}$
* Dari ② diperoleh $k < 2^k$	$\frac{\sqrt{k(k+1)} + 1}{\sqrt{k+1}} > \sqrt{k+1}$
$2k < 2 \cdot 2^k$	$\sqrt{k(k+1)} + 1 > k+1$
Karena $k+1 \leq k+k < 2 \cdot 2^k$,	$\sqrt{k(k+1)} > k$
untuk $k \in \mathbb{N}$, maka	$\sqrt{k^2+k} > \sqrt{k^2}$ [Terbukti]
Terbukti $k+1 < 2^k \cdot 2$	
$k+1 < 2^{k+1}$	
Dari Induksi matematika, disimpulkan bahwa $n < 2^n \forall n \in \mathbb{N}$.	Maka, lewat Induksi terbukti bahwa $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}, \forall n \in \mathbb{N}, n > 1$
14. Buktikan $2^n < n! \forall n \geq 4, n \in \mathbb{N}$	
① $P(4) = 2^4 < 4!$	20). Anggap X_n didefinisikan : $X_1 := 1, X_2 := 2$
$16 < 24 \checkmark$ (Benar)	dan $X_{n+2} := \frac{1}{2}(X_{n+1} + X_n) \forall n \in \mathbb{N}$.
② Anggap $P(k)$ benar $2^k < k!$	Gunakan prinsip Induksi kuat untuk buktikan
③ Buktikan $P(k+1)$ benar $2^{k+1} < (k+1)!$	$1 \leq X_n \leq 2 \forall n \in \mathbb{N}$.
$2^k \cdot 2 < (k+1) \cdot k!$	$X_3 = \frac{1}{2}(X_2 + X_1) = \frac{1}{2}(2+1) = \frac{3}{2}$
$k \cdot k! + k! > k \cdot 2^k + 2^k \geq 4 \cdot 2^k + 2^k > 2^k \cdot 2$	Asumsikan untuk $k \leq n$,
Jadi, terbukti $2^k \cdot 2 < (k+1)k!$	$x \in [1, 2]$, untuk X_{k+1} maka
$\therefore$ Terbukti $2^n < n!$ lewat induksi matematika	$X_{k+1} = \frac{1}{2}(X_k + X_{k-1})$
	$2X_{k+1} = X_k + X_{k-1}$
	Karena $k \leq n, X_k + X_{k-1} \in 2[1, 2]$
	$2 \leq X_k + X_{k-1} \leq 4$
	$2 \leq 2X_{k+1} \leq 4$
	$1 \leq X_{k+1} \leq 2$
	Terbukti $X_n \in [1, 2] \forall n \in \mathbb{N}$
18. Buktikan $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}, \forall n \in \mathbb{N}, n > 1$	
① $P(1)$ buktikan benar $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} > \sqrt{2} \rightarrow \frac{\sqrt{2} + \sqrt{1}}{\sqrt{2}} > \sqrt{2}$	
(Benar) $\checkmark$	

► Exercise 1.3.

1. Buktikan himpunan tak kosong T_1 terbatas jika ada bijeksi dari T_1 ke himpunan terbatas T_2 !
 Karena T_2 terbatas, pastilah T_2 memetakan dirinya ke $\mathbb{N}_m$, untuk $m \in \mathbb{N}$. Anggap

$$g : T_2 \rightarrow \mathbb{N}_m \text{ --- (1)}$$

Akan menjadi bijeksi dari T_2 ke $\mathbb{N}_m$.

Karena ada perasumsi bahwa ada bijeksi T_1 ke himpunan terbatas T_2 , maka dapat ditulis

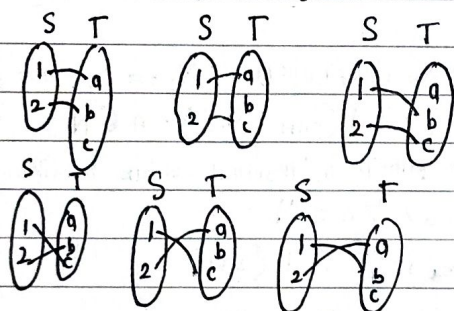
$$f : T_1 \rightarrow T_2$$

Lalu, ketika $f(g(T_1))$ maka sama dengan $\mathbb{N}_m$.

Jadi saat $f \circ g : T_1 \rightarrow \mathbb{N}_m$ bijeksi dari T_1 ke himpunan bilangan normal yang terbatas m . Maka T_1 terbatas. //

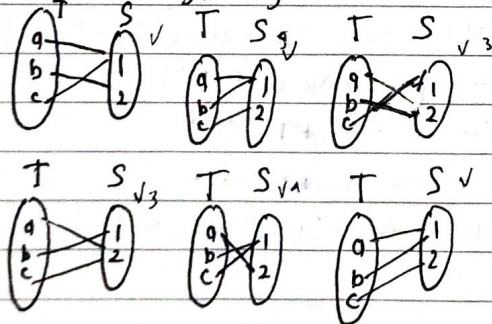
3. Anggap $S := \{1, 2\}$ dan $T := \{a, b, c\}$

- a. Tentukan banyaknya injeksi berbeda dari S ke T



Ada 6 injektif

- b. Tentukan banyak surjektif berbeda T ke S



Jumlahnya ada 6 Surjektif //

- 8). Beri contoh Koleksi terhingga dari himpunan terbatas yang union nya non infinite.

$$\hookrightarrow S_1 = \{1\}$$

$$S_2 = \{1, 2\}$$

$$S_3 = \{1, 2, 3\}$$

S_n tersebut merupakan koleksi terhingga yang tak terbatas. Gabungan semua himpunan ini akan menjadi himpunan semua bil. asli tak hingga:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \{S_n\}$$

Sehingga, diperoleh gabungan himpunan-himpunan terbatas menjadi himpunan tak terbatas. //

- 9). Buktikan secara detail bahwa S dan T denumerable maka $S \cup T$ denumerable

Diberikan $s_1, s_2, s_3, \dots$ dan $t_1, t_2, t_3, \dots$ himp terhingga.

Maka kita bisa menyatakan sebuah himpunan terhingga $S \cup T$. Maka akan terdapat fungsi satu-satu dan pada (bijektif) antara S dengan $\mathbb{N}$ dan T dengan $\mathbb{N}$.

atau $f : \mathbb{N} \rightarrow S$ dan $g : \mathbb{N} \rightarrow T$, sehingga akan terdapat $h : \mathbb{N} \rightarrow S \cup T$.

$$h(n) = \begin{cases} f(n/2) & \text{jika } n \text{ genap} \\ g((n+1)/2) & \text{jika } n \text{ ganjil.} \end{cases}$$

Sehingga, $S \cup T$ himp. tak terhingga jika S dan T himpunan tak terhingga

12. Gunakan Induksi matematika untuk buktikan jika himpunan bagian S punya n elemen maka $P(S)$ punya 2^n elemen !

① $P(1)$ benar

$$S_1 = \{x_1\} \text{ maka } P(S_1) = \{\emptyset, \{x_1\}\}$$

$$\therefore \text{ benar} \quad \hookrightarrow n P(S) = 2^1 = 2$$

② Anggap $P(k)$ benar

$$S_k = \{x_1, x_2, \dots, x_k\} \text{ maka } P(S_k) = 2^k$$

③ Akan Dibuktikan $P(k+1)$ benar

$$S_{k+1} = \{x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}\}$$

$$S_k = S_k \cup \{x_{k+1}\}$$

$\rightarrow$ Akan ada 2 kemungkinan:

@ a. Mengandung $x_{k+1} \rightarrow$ ada 2^k dari

$$P(S_{k+1}) = \{\{x_{k+1}\}, \{x_1, x_{k+1}\}, \dots, \{x_1, \dots, x_{k+1}\}\}$$

b. tak ada $x_{k+1} \rightarrow$ jumlah = $S_{k+1} - S_k = S_k = 2^k$

$$\text{Jumlahnya} = 2^k + 2^k$$

$$= 2^k \cdot 2$$

$$= 2^{k+1}$$

[Terbukti] //



ANALISIS I (F)

DEADLINE : 19 Oktober 2023

Exercise 2.1

1. Jika $a, b \in \mathbb{R}$, buktikan :

a). Jika $a + b = 0$, maka $b = -a$

$$(1) \quad a + b = 0$$

$$(2) \quad b = -a$$

Substitusikan nilai (2) ke premis (1)

$$(3) \quad a + (-a) = 0$$

Sesuai dengan teorema yang menyatakan

$a + (-a) = (-a) + a = 0$, maka dapat disimpulkan bahwa :

$$(4) \quad a + b = a + (-a)$$

Jalu, jumlahkan kedua sisi dengan $(-a)$, maka diperoleh :

$$(5) \quad a + b + (-a) = a + (-a) + (-a)$$

Sesuai Sifat komutatif (+), diperoleh :

$$(6) \quad a + (-a) + b = (-a) + (-a) + a$$

Karena menurut teorema yang menyatakan bahwa $a + (-a) = (-a) + a = 0$, diperoleh

$$(7) \quad 0 + b = (-a) + 0$$

Sesuai teorema $a + 0 = 0 + a = a$, maka :

$$(8) \quad b = -a \quad [\text{TERBUKTI}]$$

b). $-(-a) = a$

Berdasarkan teorema yang menyatakan bahwa $\forall a \in \mathbb{R}$, maka akan ada $-a \in \mathbb{R}$ sedemikian hingga $a + (-a) = (-a) + a = 0$, maka :

$$a + (-a) = 0$$

Jalu, jumlahkan kedua ruas dengan $-(-a)$. Akan diperoleh

$$a + (-a) + (-(-a)) = 0 + (-(-a))$$

Sesuai konsep $a + (-a) = 0$, maka didapat :

$$a + 0 = -(-a)$$

Menurut teorema yang menyatakan $a + 0 = 0 + a = a$ akan didapatkan

$$a = -(-a)$$

[TERBUKTI]

c). $(-1)a = -a$

Berdasarkan teorema yang menyatakan $a + 0 = 0 + a = a$, diperoleh :

$$(-a) = (-a) + 0$$

Sesuai dengan teorema $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$, maka :

$$(-a) = (-a) + a \cdot 0$$

Setelah itu, sesuai dengan teorema eksistensi

elemen negatif $a + (-a) = (-a) + a = 0$, maka akan didapatkan :

$$(-a) = (-a) + a [1 + (-1)] \quad \text{asosiatif}$$

$$(-a) = (-a) + a + (-1)a$$

Dengan prinsip yang ada pada teorema

$(a + (-a)) = (-a) + a = 0$, didapatkan

$$(-a) = 0 + (-1)a$$

Sesuai teorema $a + 0 = 0 + a = a$, maka

$$(-a) = (-1)a \quad [\text{Terbukti}] //$$

d). $(-1)(-1) = 1$

Sesuai dengan Eksistensi 1, yakni $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ maka :

$$1 \cdot 1 = 1$$

Sehingga, ketika dikaitkan dengan teorema

$0 + a = a + 0 = a$ serta sesuai dengan konsep eksistensi elemen negatif, yakni $a + (-a) = (-a) + a = 0$ maka :

$$(0 + 1)(0 + 1) = 1$$

$$[(-1) + 1 + 1][(-1) + 1 + 1] = 1$$

$$= (-1)(-1) + (-1) + (-1) + (-1) + 1 + 1 + (-1) + 1 + 1 = 1$$

Komutatifkan, hingga :

$$= (-1)(-1) + (-1) + 1 + (-1) + 1 + (-1) + 1 + (-1) + 1 = 1$$

Sesuai dengan $a + (-a) = (-a) + a = 0$, maka

$$= (-1)(-1) + 0 + 0 + 0 + 0 = 1$$

Berdasarkan $a + 0 = 0 + a = a$, maka

$$= (-1)(-1) = 1 \quad (\text{TERBUKTI}) //$$

2. Buktikan jika $a, b \in \mathbb{R}$ maka ..

(a). $-(a+b) = (-a) + (-b)$

$0 = 0$ (Jelas).

Karena $a + (-a) = (-a) + a = 0$

$a + (-a) = b + (-b)$

Sesuai $a + 0 = 0 + a = a$, maka :

$a + (-a) + 0 = b + (-b) + 0$

Berdasarkan $a + (-a) = (-a) + a = 0$, maka :

$a + (-a) + b + (-b) = b + (-b) + (-b) + b$

→ komutatifkan, hingga terbentuk

$a + b + (-a) + (-b) = b + (-b) + b + (-b)$

Berdasarkan $a + (-a) = 0$, maka

$(a+b) + (-a) + (-b) = 0$

Sesuai dengan kasus jika ada $a = b$, maka

$a + a = b + b$

$(a+b) + (-a) + (-b) + (-a+b) = -(a+b)$

Komutatifkan lalu gunakan teorema $a + (-a)$

$= (-a) + a = 0$, maka

$(-a) + (-b) = -(a+b)$

[TERBUKTI]

→ Cara Lain :

Jelas bahwa : $-(a+b) = -(a+b)$

bentuk tersebut dapat dituliskan :

$-1(a+b) = -(a+b)$

Sesuai prinsip distribusi diperoleh bahwa

$(-1.a) + (-1.b) = -(a+b)$

maka dapat diperoleh

$(-a) + (-b) = -(a+b)$ [TERBUKTI]

(b). $(-a)(-b) = a.b$

Bukti :

$0 = 0$

Pada teorema $a.0 = 0$, terapkan pada persamaan, maka

$0.b = 0.b$

→ Sesuai teorema $a + (-a) = (-a) + a = 0$

* Ingat juga, apabila a diganti $(-c)$, maka :

$(-c) + -(-c) = -(-c) + (-c) = 0$

Sehingga,

$(-a + -(-a)) \cdot b = (a + (-a))b$

Berdasarkan sifat Distributif

$(-ab) + -(-a)b = ab + (-ab)$

Sesuai sifat komutatif perkalian, maka :

$(-ab) + (-a) \cdot -b = ab + (-ab)$

Berdasarkan kekongruenan, nilai $(-ab)$ di ruas kiri = ruas kanan, sehingga nilai $(-a)(-b)$ ruas kiri = ab ruas kanan, diperoleh

$(-a)(-b) = ab$ [TERBUKTI]

(c). $[1/(-a)] = -(1/a)$

Bukti :

$1 = 1$ (jelas)

Sesuai eksistensi Invers, diperoleh

$(-a) \cdot \left(-\left(\frac{1}{a}\right)\right) = (-a) \cdot \left(-\left(\frac{1}{a}\right)\right)$

Berdasarkan asosiatif perkalian, diperoleh :

$(-a) \cdot \left(\frac{1}{-a}\right) = (-a) \cdot \left(-\left(\frac{1}{a}\right)\right)$

Menukur kekongruenan, bentuk $(-a)$ pada ruas

kiri = $(-a)$ pada ruas kanan. Sehingga bentuk

$1/(-a)$ ruas kiri harus sama dengan $-(1/a)$ ruas kanan, Sehingga :

$1/(-a) = -(1/a)$ [TERBUKTI]

(d). $-(a/b) = (-a)/b$, jika $b \neq 0$

Bukti :

$0 = 0$ (Jelas)

Sesuai Konsep eksistensi elemen negatif atau $a + (-a) =$

$(-a) + a = 0$, maka :

$\left(\frac{a}{b}\right) + -\left(\frac{a}{b}\right) = \left(-\frac{a}{b} + -\left(-\frac{a}{b}\right)\right)$

Setelah itu, menggunakan sifat asosiatif perkalian, terbukti :

$\frac{a}{b} + \left[-\left(\frac{a}{b}\right)\right] = \frac{(-a)}{b} + [(-1)(-1)] \frac{a}{b}$

Sesuai pembuktian nomor 1 d, terbukti bahwa

$1 = (-1)(-1)$.

* Pembuktian $(-1)(-1) = 1$

$$1 \cdot 1 = 1 \quad (\text{dari teorema } a \cdot 1 = 1 \cdot a = 1)$$

Sesuai teorema $a + 0 = 0 + a = a$, diperoleh

$$(0 + 1)(0 + 1) = 1$$

Menurut eksistensi elemen negatif, yakni $(a) + (-a) =$

$$(-a) + (a) = 0, \text{ maka:}$$

$$((-1) + 1 + 1)((-1) + 1 + 1) = 1$$

$$(-1)(-1) + (-1) + (-1) + 1(-1) + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 +$$

$$1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 1$$

$$(-1)(-1) + 0 = 1$$

Sesuai teorema $a + 0 = 0 + a = a$

$$\rightarrow (-1)(-1) = 1$$

► Lanjutan

$$\frac{a}{b} + \left[-\left(\frac{a}{b}\right) \right] = \frac{(-a)}{b} + [(-1)(-1)] \frac{a}{b}$$

$$\frac{a}{b} + \left[-\left(\frac{a}{b}\right) \right] = \frac{(-a)}{b} + \frac{a}{b}$$

Berdasarkan kekongruenan, yakni $\frac{a}{b}$ ruas kiri = $\frac{a}{b}$ ruas kanan. Sehingga $[-(a/b)] = (-a)/b$.

$$-(a/b) = (-a)/b \quad [\text{TERBUKTI}]$$

3. Selesaikan persamaan berikut, jelaskan alasan tiap langkah berdasarkan properti atau teorema.

$$(a). \quad 2x + 5 = 8$$

► Berdasarkan eksistensi invers penjumlahan

$$(2x + 5) + (-8) = 8 + (-8)$$

Sesuai sifat asosiatif identitas penjumlahan

dan sifat eksistensi elemen negatif $[a + (-a) = (-a) + a = 0]$

$$2x + (5 + (-8)) = 0$$

$$2x + (-3) = 0$$

Eksistensi invers penjumlahan:

$$2x + (-3) + 3 = 0 + 3$$

Menurut sifat invers $a + (-a) = (-a) + a = 0$

dan $0 + a = a + 0 = a$. Sehingga:

$$2x = 3$$

Karena $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$, maka:

$$1 \cdot 2x = 3$$

Berdasarkan teorema eksistensi invers, yakni

$a(1/a) = 1$, maka diperoleh:

$$2 \left(\frac{1}{2} \right) 2x = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \right) \cdot 3$$

Jadi, menurut asosiatif perkalian dan teorema eksistensi invers didapat:

$$2 \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \right) x = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 3 \right)$$

$$2 \cdot x = 2 \left(\frac{3}{2} \right)$$

Berdasarkan kekongruenan, 2 di ruas kiri = 2 di ruas kanan,

sehingga $x = \frac{3}{2}$. Jadi,

$$x = \frac{3}{2}$$

$$(b). \quad x^2 = 2x$$

Sesuai teorema $a + (-a) = (-a) + a = 0$, dan $a + 0 =$

$$0 + a = a$$

$$x^2 + 0 = 2x$$

$$+ x^2 + (2x) + (-2x) = 2x + (-2x) + 2x$$

$$x^2 + (-2x) + (2x) = 0 + 2x$$

Berdasarkan kekongruenan, $2x$ di ruas kiri = $2x$ di ruas kanan, maka $x^2 + (-2x) = 0$.

$$x^2 + (-2x) = 0$$

Menurut distribusi, akan diperoleh:

$$x(x - 2) = 0$$

Berdasarkan kekongruenan (kesamaan nilai), maka

$$x = 0 \text{ atau } x - 2 = 0$$

$$\text{► } x = 0 \quad [\text{Nilai } x = 0]$$

$$\text{► } x - 2 = 0$$

Sesuai teorema $a + (-a) = (-a) + a = 0$, dan $a + 0 = 0 + a = a$

$$x - 2 + 0 = 0$$

$$x - 2 + 2 + (-2) = 2 + (-2)$$

$$x + (-2) = 2 + (-2)$$

Berdasarkan kesamaan nilai, (-2) ruas kiri = (-2)

ruas kanan. Sehingga $x = 2$.

$$x = 2$$

$$\text{Jawab} = x = 0 \vee x = 2 \quad [\text{TERBUKTI}]$$

$$(c) x^2 - 1 = 3$$

$$x^2 - 1 + 0 = 3 + 0 \quad (\text{Sesuai teorema } a+0=0+a=a)$$

$$x^2 - 1 + (3 + (-3)) = 3 + (3 + (-3)) \quad [\text{Sesuai eksistensi elemen negatif } 0 = a + (-a) = (-a) + a]$$

$$x^2 - 1 + (-3) + 3 = 0 + 3 \quad [\text{Karena } 3 \text{ di sisi kiri} = 3 \text{ di sisi kanan, maka } x^2 - 1 + (-3) = 0]$$

$$x^2 - 1 + (-3) = 0$$

$$x^2 - 4 = 0$$

$$(x-2)(x+2) = 0 \quad [\text{sesuai sifat Distribusi}]$$

$$(x-2) = 0 \vee x+2 = 0 \quad [\text{sesuai } a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0]$$

$$\Rightarrow x-2 + 0 = 0 \quad [\text{sesuai } a+0 = 0+a=a]$$

$$x-2 + (2 + (-2)) = (2 + (-2)) \quad [\text{sesuai } a + (-a) = (-a) + a = 0]$$

$$x + (-2) = 2 + (-2) \quad [\text{Karena } (-2) \text{ di kiri} = (-2) \text{ di kanan; maka } x = 2]$$

$$x = 2 //$$

$$\Rightarrow x + 2 = 0$$

$$x + 2 = (2 + (-2)) \quad [\text{Sesuai } a + (-a) = (-a) + a = 0]$$

$$x + 2 = (2 + (-2)) + 2 \quad [\text{Karena } (2) \text{ di kiri} = (2) \text{ di kanan, maka } x = (-2)]$$

$$x = -2 //$$

$$\text{Jawab} = x = 2 \vee x = -2 //$$

$$(d). (x-1)(x+2) = 0$$

$$(x-1) = 0 \vee (x+2) = 0 \quad [\text{sesuai } a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0]$$

$$\Rightarrow x-1 = 0$$

$$x-1 = (1 + (-1)) \quad [\text{menurut } (a) + (-a) = (-a) + a = 0]$$

$$x-1 = 1 - 1 \quad [\text{Karena } (-1) \text{ di kiri} = (-1) \text{ di kanan, maka } x = 1]$$

$$x = 1 //$$

$$\Rightarrow x + 2 = 0$$

$$x + 2 = (2 + (-2)) \quad [\text{menurut } a + (-a) = (-a) + a = 0]$$

$$x + 2 = (-2) + 2 \quad [\text{Karena } 2 \text{ di kiri} = 2 \text{ di kanan, maka } x = -2]$$

$$x = -2 //$$

$$\text{Jawab} = x = 1 \vee x = -2 //$$

6) Gunakan argumen pada pembuktian teorema

2.1.4 untuk menunjukkan bahwa tidak ada bilangan rasional sehingga $s^2 = 6$.

Misal s bilangan rasional $\frac{p}{q}$, maka $\text{FPB}(p,q)=1$

$$\Rightarrow s^2 = 6$$

$$\frac{p^2}{q^2} = 6$$

$$p^2 = 6q^2$$

$$p^2 = 2(3q^2) \Rightarrow \text{Sehingga } p = \text{genap.}$$

dapat ditulis $p = 2m$

$$4m^2 = 2(3q^2)$$

$$2m^2 = 3q^2 \rightarrow \text{maka } q = \text{genap.}$$

$\Rightarrow$ Ketika p dan q genap, maka p dan q bukan bilangan rasional.

* Coba misalkan q ganjil, maka $q = 2n+1$

$$2m^2 = 3(2n+1)^2$$

$$2m^2 = 3(4n^2 + 4n + 1)$$

$$2m^2 = 12n^2 + 12n + 3$$

Karena ruas kiri genap dan kanan ganjil, maka terjadi kontradiksi.

$\therefore$ Tidak ada bilangan rasional s yang memenuhi $s^2 = 6$

10) (a). Jika $a < b$ dan $c \leq d$, buktikan

$$a+c < b+d$$

$\Rightarrow$ Jika $c = d$

$$a < b$$

$$a+c < b+c \quad [\text{sesuai teorema 6}]$$

* Karena $c = d$, maka

$$a+c < b+d$$

$\Rightarrow$ Jika $c < d$

$$* a < b$$

$$a+c < b+c \quad [\text{sesuai teorema 6}] \dots ①$$

$$* c < d$$

$$b+c < b+d \quad [\text{sesuai teorema 6}] \dots ②$$

$$\rightarrow a+c < b+c < b+d$$

$$a+c < b+d$$

[TERBUKTI]

Nama : Mohammad Febryan Khamim

NRP : 5002224072

Analisis I (F)

Exercise 2.1

II. (a). Tunjukkan jika $a > 0$, maka $\frac{1}{a} > 0$ dan $\frac{1}{(\frac{1}{a})} = a$

* Anggap $a > 0$, dan $\frac{1}{a} \leq 0$ benar...

Maka: Karena $a \oplus$, maka $-\frac{1}{a} \oplus$.

Sesuai prinsip $(a \cdot \frac{1}{a}) = (\frac{1}{a} \cdot a) = 1$, maka berlaku $a \cdot \frac{1}{a} = \oplus \cdot \ominus$

$= \ominus 1$ [Kontradiksi], maka $\frac{1}{a}$ haruslah bernilai positif [> 0]

* Sesuai prinsip $p[\frac{1}{p}] = [\frac{1}{p}]p = 1$.

Misal: $p = \frac{1}{a}$

$$\Rightarrow (\frac{1}{a}) \left[\frac{1}{(\frac{1}{a})} \right] = 1$$

Sesuai: $1 = a \cdot (\frac{1}{a}) = (\frac{1}{a}) \cdot a$

$$\Rightarrow (\frac{1}{a}) \left[\frac{1}{(\frac{1}{a})} \right] = a \cdot (\frac{1}{a})$$

Menurut Komutatif perkalian $ab = ba$

$$= (\frac{1}{a}) \left[\frac{1}{(\frac{1}{a})} \right] = (\frac{1}{a}) \cdot a$$

Berdasarkan kesamaan nilai $\rightarrow$ karena $\frac{1}{a}$ ruas kiri sama dengan $\frac{1}{a}$ ruas kanan. Sehingga $\left[\frac{1}{(\frac{1}{a})} \right] = a$

$$\Rightarrow \left[\frac{1}{(\frac{1}{a})} \right] = a$$

Sehingga, terbukti bahwa jika $a > 0$, maka $\frac{1}{a} > 0$ dan $\frac{1}{(\frac{1}{a})} = a$

II. Jika $0 \leq a < b$, tunjukkan $a^2 \leq ab < b^2$. Tunjukkan dengan contoh tidak sesuai $a^2 < ab < b^2$

$$\bullet 0 \leq a < b$$

$$\rightarrow 0 \leq a^2 < ab \dots (1)$$

$$\bullet 0 \leq a < b$$

$$\rightarrow 0 \leq ab < b^2$$

$$\therefore 0 \leq a^2 < ab < b^2$$

Contoh tak sesuai:

$a = 0$, maka

$$0^2 < 0(b) < b^2$$

$$0 < 0 < b^2$$

(Sehingga terbukti salah)

[TERBUKTI]

15). Jika $0 < a < b$, Tunjukkan

$$(a). a < \sqrt{ab} < b$$

$$(b). \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$$

Jawab.

(a). * $0 < a < b$

$$0 \cdot a < a^2 < ab \text{ (sesuai teorema 6)}$$

$$0 < \sqrt{a^2} < \sqrt{ab}$$

$$0 < a < \sqrt{ab} \dots (1)$$

* $0 < a < b$

$$0 \cdot b < a \cdot b < b^2 \text{ (sesuai teorema 6)}$$

$$0 < \sqrt{ab} < \sqrt{b^2}$$

$$0 < \sqrt{ab} < b \dots (2)$$

Sehingga: $0 < a < \sqrt{ab}$

$$0 < \sqrt{ab} < b$$

$$\Rightarrow a < \sqrt{ab} < b \text{ [TERBUKTI]}$$

(b). $0 < a < b \times \frac{1}{a}$ (sesuai teorema 6)

$$0 \cdot \frac{1}{a} < a \cdot \frac{1}{a} < b \cdot \frac{1}{a}$$

$$0 < 1 < \frac{b}{a} \text{ (sesuai sifat } a \cdot \frac{1}{a} = 1)$$

$$0 < 1 \cdot \frac{1}{b} < \frac{1}{a} \cdot b \cdot \frac{1}{b} \text{ (sesuai sifat } b \cdot \frac{1}{b} = 1)$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$$

$$\text{Terbukti } \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$$

► Exercise 2.3

2. Anggap $S_2 := \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$. Apakah S_2 punya batas bawah? Apakah S_2 punya batas atas? Apakah $\inf S_2$ ada? Apakah $\sup S_2$ ada? Buktikan pendapatmu!

a). Karena $x > 0$, maka sudah jelas bahwa 0 merupakan BATAS BAWAH S_2 . Karena jika ada $s \in S_2$, maka pastilah $s > 0, \forall s \in S_2$. Hal tersebut sesuai dengan definisi yang mengungkapkan bahwa bila $w \in \mathbb{R}$ BATAS BAWAH S , jika $s \geq w, \forall s \in S$. Selain 0, S_2 juga punya batas bawah lain, yakni semua bilangan Real kurang dari 0.

∴ S_2 PUNYA BATAS BAWAH, yakni $x \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

b). Sementara S_2 tak punya batas atas, karena ketika diambil u_k batas atas terkecil S_2 , maka $u_k + u_{k+1}$ juga masih anggota S_2 . Sehingga untuk u batas atas $s, \forall s \in S_2$, tak akan pernah memenuhi $s \leq u, \forall s \in S_2$.

c). Karena S_2 punya batas bawah $x \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Sesuai definisi infimum, bahwa apabila tidak ada batas bawah yang lebih dari 0, maka pasti disimpulkan bahwa S_2 memiliki $\inf$, yakni 0.

d). Karena S_2 tak terbatas di atas, maka pasti S_2 tak punya supremum.

4. Anggap $S_4 := \{1 - (-1)^n/n : n \in \mathbb{N}\}$. Cari $\inf S_4$ dan $\sup S_4$!

$$S_4 := \{1 - (-1)^n/n\} \begin{cases} n \text{ ganjil} : x_n = 1 + \frac{1}{n}, \\ 1 < x_n \leq 2 \\ n \text{ genap} : x_n = 1 - \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} \leq x_n < 1 \end{cases}$$

► Anggap benar bahwa 2 merupakan $\sup S_4$, maka ada batas atas lain, yakni u , maka $2 \leq u$.

Hal tersebut terbukti benar dari fungsi sepotong-sepo

tong yang telah dibuat. Semua bilangan ≥ 2 pastilah batas atas S_4 .

[TERBUKTI $\sup S_4 = 2$]

► Anggap benar bahwa $1/2$ adalah $\inf S_4$, maka ada batas bawah lain, yakni v , maka $v \leq 1/2$. Hal tersebut terbukti benar dari fungsi sepotong-potong yang telah dibuat, semua bilangan $\leq 1/2$ pasti batas bawah S_4 .

[TERBUKTI $\inf S_4 = 1/2$]

6). Anggap S himpunan tak kosong dan subset $\mathbb{R}$ yang terbatas di bawah. Buktikan $\inf S = -\sup\{-s : s \in S\}$

Anggap $k = \inf S$, maka sesuai definisi infimum $k \leq s$

Menurut teorema $a \leq b$ dan $c < 0$, maka $ac \geq bc$, maka $-k \geq -s$

Maka $-k$ adalah supremum dari $\{-s : s \in S\}$. Atau dapat ditulis :

$$-k = \sup(-s)$$

Kali kan (-1) tiap ruas, sehingga :

$$k = -\sup(-s)$$

Karena $k = \inf S$, maka

$$\inf S = -\sup(-s) \quad \text{[TERBUKTI]}$$

10). Tunjukkan bahwa jika A dan B subset terbatas $\mathbb{R}$, maka $A \cup B$ juga terbatas.

Tunjukkan $\sup(A \cup B) = \sup\{\sup A, \sup B\}$

► Karena A punya batas $\mathbb{R}$ dan B punya batas $\mathbb{R}$. Anggap $\inf A = p$; $\sup A = q$. Sementara $\inf B = m$; $\sup B = n$.

Sehingga, $A \cup B$ pastilah terbatas pada

Infimum $\Rightarrow \min(p, m)$, sementara

Supremum $\Rightarrow \max(q, n)$.

► Ingat bahwa ketika $x \in A \cup B$, maka $x \in A$ atau $x \in B$, sehingga Batas atas minimum (Supremum) dari $x \in A \cup B$ adalah $\max(q, n)$ atau misal $\sup(A \cup B) = v$. Dengan begitu

$\sup A \leq v$ dan $\sup B \leq v$. Diperoleh

$$\sup\{\sup A, \sup B\} \leq v$$

Disimpulkan bahwa $A \cup B$ terbatas dan
 $\sup(A \cup B) = \sup(\sup A, \sup B)$.

[TERBUKTI]

► Exercise 2.4

2. Jika $S := \{\frac{1}{n} - \frac{1}{m} : n, m \in \mathbb{N}\}$, temukan
 $\inf S$ dan $\sup S$.

Jelas bahwa

$$0 < \frac{1}{n} \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Serta

$$0 < \frac{1}{m} \leq 1 \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

$$\text{maka, } -1 < \frac{1}{n} - \frac{1}{m} < 1, \quad \forall m, n \in \mathbb{N}$$

► Berdasarkan Sifat Archimedes, jika diberikan $\epsilon > 0$
 terdapat bilangan asli n sedemikian hingga:

$$1 - \epsilon < 1 - \frac{1}{m}$$

Amati juga bahwa $x_{n,m} = 1 - \frac{1}{m}$ (ketika $n=1$).

Sehingga :

$$1 - \epsilon < x_{n,m}.$$

Berdasarkan Lemma 2.3.4 terbukti 1 adalah
 $\sup S$.

► Asumsikan ϑ batas bawah S , dan $\vartheta > -1$, maka
 $\epsilon = \vartheta + 1 > 0$. Sehingga

$$\frac{1}{n} < \vartheta + 1$$

Sehingga,

$$\frac{1}{n} - 1 < \vartheta.$$

Amati bahwa $x_{n,1} = \frac{1}{n} - 1$ (ketika $m=1$). Artinya,
 ada anggota $\frac{1}{n} - 1$ yang kurang dari ϑ (kontradiksi)
 Maka haruslah haruslah $\vartheta \leq -1 \rightarrow -1 \inf S$.

$\therefore$ Terbukti $\sup S = 1$ dan $\inf S = -1$

4. Anggap S himpunan tak kosong dan terbatas di $\mathbb{R}$
 (a). Anggap $a > 0$, dan $aS := \{as : s \in S\}$.

Buktikan :

$$\inf(aS) = a \cdot \inf S, \quad \sup(aS) = a \sup S$$

misal $k = \inf S$. Dari definisi Infimum didapatkan
 bahwa k batas bawah S atau dapat ditulis

$$k \leq s, \quad \forall s \in S. \quad \text{Amati bahwa :}$$

$$ak \leq as, \quad a > 0 \text{ dan } s \in S.$$

sehingga, apabila kita ambil bilangan k terbesar
 yang memenuhi syarat tersebut, maka ak adalah
 infimum dari aS . Atau dapat dituliskan

$$ak = \inf(aS).$$

Karena $k = \inf S$, Maka

$$a \cdot \inf S = \inf(aS) \quad [\text{Terbukti}].$$

► Kemudian apabila kita misalkan u sembarang batas
 atas dari aS , maka :

$$u \geq as$$

Ketika $a > 0$, maka

$$\frac{u}{a} \geq s, \quad \forall s \in S.$$

Sehingga $\frac{u}{a}$ batas atas S atau dapat ditulis

$$\frac{u}{a} = \sup S$$

$$u = a \sup S$$

Karena $u = \sup(aS)$, maka

$$\sup(aS) = a \sup S \quad [\text{Terbukti}]$$

- (b). Anggap $b < 0$ dan $bS := \{bs : s \in S\}$

buktikan :

$$\inf(bS) = b \sup S, \quad \sup(bS) = b \inf S.$$

misal $k = \inf S$. Sesuai definisi Infimum diperoleh

bahwa k batas bawah S atau dapat dinyatakan

$$k \leq s, \quad \forall s \in S. \quad \text{Amati bahwa :}$$

$$k \leq s$$

Untuk $b < 0$, maka

$$b \cdot k \geq bs$$

Sehingga bila kita ambil k terbesar yang memenuhi
 syarat, diperoleh bk supremum bS atau ditulis

$$bk = \sup bS$$

Karena $k = \inf S$, maka :

$$b \cdot \inf S = \sup bS \quad [\text{Terbukti}].$$

Misal $n = \sup bS$, Sesuai definisi diperoleh bahwa
 $n \geq bs, \forall s \in S$.

Amati jika $b < 0$

$$\frac{n}{b} \leq S.$$

Sehingga $\frac{n}{b}$ adalah batas bawah terbesar S atau dapat ditulis

$$\frac{n}{b} = \inf S, \text{ maka}$$

$$n = b \cdot \inf S$$

Karena $n = \sup bS$, maka

$$\sup bS = b \cdot \inf S$$

[TERBUKTI]

6. Anggap X adalah himpunan bagian tak kosong dan $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ range terbatas di $\mathbb{R}$. Jika $a \in \mathbb{R}$ tunjukkan bahwa contoh 2.4.1 (a) menyimpulkan.

$$\sup \{a + f(x) : x \in X\} = a + \sup \{f(x) : x \in X\}$$

Tunjukkan bahwa kita juga punya $a + \inf$

$$\inf \{a + f(x) : x \in X\} = a + \inf \{f(x) : x \in X\}$$

Jawab :

Pada contoh 2.4.1 telah terbukti

$$\inf \{a + s : a \in S\} = a + \inf \{s : s \in S\} \text{ dan}$$

$$\sup \{a + s : a \in S\} = a + \sup \{s : s \in S\}$$

Untuk membuktikan pernyataan pada soal, tinjau

$$f(X) = \{f(x) : x \in X\}$$

Dapat dilihat bahwa,

$$\begin{aligned} \{f(x) : x \in X\} &= \{f(x) : f(x) \in f(X)\} \\ &= \{y : y \in f(X)\} \end{aligned}$$

Karena pada soal range f terbatas maka himpunan $\{y : y \in f(X)\}$ terbatas. Sehingga, himpunan $\{a + y : y \in f(X)\}$ juga terbatas. Maka

$$\begin{aligned} \sup \{a + f(x) : x \in X\} &= \sup \{a + y : y \in f(X)\} \\ &= a + \sup \{y : y \in f(X)\} \\ &= a + \sup \{f(x) : x \in X\} \end{aligned}$$

Dengan cara sama, diperoleh :

$$\begin{aligned} \inf \{a + f(x) : x \in X\} &= \inf \{a + y : y \in f(X)\} \\ &= a + \inf \{y : y \in f(X)\} \\ &= a + \inf \{f(x) : x \in X\} \end{aligned}$$

- 10). Lakukan perhitungan pada (a) dan (b) latihan sebelumnya untuk fungsi $h: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ yang didefinisikan oleh :

$$h(x, y) := \begin{cases} 0 & \text{jika } x < y \\ 1 & \text{jika } x \geq y \end{cases}$$

- (a). $\forall x, h(x, x) = 1$ Jadi, $f(x) = 1$ dan dengan demikian $\inf \{f(x) : x \in X\} = 1$

- (b). Untuk semua $y \in Y, h(y/2, y) = 0$. Jadi $g(y) = 0$ dan dengan demikian $\sup \{g(y) : y \in Y\} = 0$

► Exercise 3.1

5. Gunakan definisi limit suatu barisan untuk menetapkan limit berikut.

a. Diberikan sebarang $\epsilon > 0$. Berdasarkan sifat Archimedian, maka terdapat $k > 1/\epsilon$. Selanjutnya, untuk bilangan asli n dengan $n \geq k$, berlaku :

$$\left| \frac{n}{n^2+1} \right| = \frac{n}{n^2+1}$$

$$< \frac{1}{n}$$

$$\leq \frac{1}{k} < \epsilon$$

Sehingga terbukti $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2+1} \right) = 0$

b. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n}{n+1} \right) = 2$

Diberikan sebarang $\epsilon > 0$. Berdasarkan sifat Archimedian maka terdapat bil. asli k , sehingga $k > 2/\epsilon$.

Jalu, untuk bilangan asli n dengan $n \geq k$, berlaku:

$$\left| \frac{2n}{n+1} - 2 \right| = \left| \frac{2}{n+1} \right|$$

$$= \frac{2}{n+1}$$

$$\leq \frac{2}{k+1}$$

$$< \frac{2}{k} < \epsilon$$

Terbukti $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n}{n+1} \right) = 2$

c. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+1}{2n+5} \right) = \frac{3}{2}$

Diberikan $\epsilon > 0$, Berdasarkan sifat Archimedian, terdapat bilangan asli k , sehingga $k > 1/\epsilon$.

Selanjutnya, untuk bilangan asli n , dengan $n \geq k$, didapatkan :

$$\left| \frac{3n+1}{2n+5} - \frac{3}{2} \right| = \left| \frac{6n+2-6n-15}{4n+10} \right|$$

$$= \left| \frac{13}{4n+10} \right|$$

Karena $\frac{13}{4n+10} < 1$ dan

$$\frac{13}{4n+10} < \frac{13}{4n} < \frac{16}{4n} = \frac{4}{n}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Sehingga, $\frac{4}{n} < \epsilon$

Jadi, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+1}{2n+5} \right) = \frac{3}{2}$

d. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2-1}{2n^2+3} \right) = \frac{1}{2}$

Diberikan $\epsilon > 0$, Berdasarkan Archimedian, maka terdapat k sehingga $k > 5/\epsilon$. Lalu, untuk bilangan asli n dengan $n \geq k$ berlaku :

$$\left| \frac{n^2-1}{2n^2+3} - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{2n^2-2-2n^2-3}{4n^2+6} \right|$$

$$= \left| \frac{-5}{4n^2+6} \right|$$

$$= \frac{5}{4n^2+6}$$

$$\leq \frac{5}{4k^2}$$

$$\leq \frac{5}{4k} < \epsilon$$

Terbukti $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2-1}{2n^2+3} \right) = \frac{1}{2}$

6). Tunjukkan bahwa :

a. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n+7}} \right) = 0$

Diberikan sebarang $\epsilon > 0$. Berdasarkan sifat

Archimedian terdapat bilangan asli k , sehingga $k > \frac{1}{\epsilon^2}$

Untuk bil. asli $n \geq k$, berlaku

$$\left| \frac{1}{\sqrt{n+7}} \right| = \frac{1}{\sqrt{n+7}}$$

$$< \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{k}} < \epsilon$$

Terbukti, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n+7}} \right) = 0$

$$b). \lim \left(\frac{2n}{n+2} \right) = 2$$

Diberikan sebarang $\epsilon > 0$. Berdasarkan Archimedean, maka ada bil. asli k , $k > 4/\epsilon$. Lalu, untuk bil. asli $n \geq k$ terbukti:

$$\left| \frac{2n}{n+2} - 2 \right| = \left| \frac{2n - 2n - 4}{n+2} \right|$$

$$= \frac{4}{n+2}$$

$$\leq \frac{4}{k+2}$$

$$< \frac{4}{k} < \epsilon$$

$$\text{Terbukti } \lim \left(\frac{2n}{n+2} \right) = 2$$

$$c) \lim \left(\frac{\sqrt{n}}{n+1} \right) = 0$$

Diberikan sebarang $\epsilon > 0$, berdasarkan sifat Archimedean, Maka terdapat bil. asli k sehingga $k > 1/\sqrt{\epsilon}$. Selanjutnya, untuk bil. asli $n \geq k$, berlaku:

$$\left| \frac{\sqrt{n}}{n+1} \right| = \frac{\sqrt{n}}{n+1}$$

$$< \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$< \frac{1}{\sqrt{k}} < \epsilon$$

$$\text{Terbukti, } \lim \left(\frac{\sqrt{n}}{n+1} \right) = 0$$

$$d). \lim \left(\frac{(-1)^n n}{n^2+1} \right) = 0$$

Diberikan sebarang $\epsilon > 0$. Berdasarkan sifat Archimedean terdapat bil. asli k sehingga $k > 1/\epsilon$. Lalu, untuk bil. asli $n \geq k$ berlaku:

$$\left| \frac{(-1)^n n}{n^2+1} \right| = \frac{n}{n^2+1}$$

$$< \frac{1}{n}$$

$$\leq \frac{1}{k} < \epsilon$$

Terbukti bahwa $\lim \left(\frac{(-1)^n n}{n^2+1} \right) = 0$

8). Buktikan bahwa $\lim (x_n) = 0$ jika dan hanya jika $\lim (|x_n|) = 0$. Tunjukkan contoh untuk memperlihatkan bahwa ke konvergenan 'dari $(|x_n|)$ tidak harus mengimplikasikan kekonvergenan x_n !

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ berlaku } |(x_n)| = |x_n|.$$

Sehingga, dengan teorema 3.1.3 diperoleh $\lim (x_n) = 0$ jika dan hanya jika $\lim (|x_n|) = 0$. Misal, ambil $x_n = (-1)^n$. Untuk tiap $n \in \mathbb{N}$. Perhatikan bahwa $|x_n| = 1$. Sehingga barisan $(|x_n|)$ konvergen ke 1. Sedangkan barisan (x_n) tidak konvergen.

$$11). \text{ Tunjukkan bahwa } \lim \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 0$$

Untuk setiap bil. asli n , berlaku:

$$\left| \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right| = \frac{n+1-n}{n(n+1)}$$

$$= \frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n}$$

Karena $\lim \left(\frac{1}{n} \right) = 0$, maka berlaku:

$$\lim \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 0$$

$$13). \text{ Tunjukkan bahwa } \lim \left(\frac{1}{3^n} \right) = 0$$

$\forall n \in \mathbb{N}$ berlaku $n < 3^n$.

$$\text{Karena } \frac{1}{3^n} < \frac{1}{n}$$

$$\text{Karena } \lim \left(\frac{1}{n} \right) = 0 \text{ maka: } \lim \left(\frac{1}{3^n} \right) = 0$$

► Exercises 3.2

1. Untuk masing-masing x_n yang diberikan oleh persamaan berikut, bangun apakah barisan (x_n) konvergen atau divergen?

(a). $x_n := \frac{n}{n+1}$

Untuk tiap bil. asli n , diperoleh

$$x_n = \frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Karena konvergen ke 1, maka diperoleh bahwa barisan x_n akan konvergen ke 1. Atau ditulis

$$\begin{aligned} \lim x_n &= \lim \frac{n}{n+1} \\ &= 1 - \lim \frac{1}{n+1} \quad [\text{Konvergen}] \\ &= 1 \end{aligned}$$

(b). $x_n := \frac{(-1)^n n}{n+1}$

Perhatikan bahwa $\forall n \in \mathbb{N}$, didapatkan:

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{(-1)^n n}{n+1} \\ &= (-1)^n - \frac{(-1)^n}{n+1} \end{aligned}$$

Karena $\frac{(-1)^n}{n+1}$ konvergen ke 0. Tetapi barisan

$(-1)^n$ divergen, maka $\boxed{x_n \text{ divergen}}$.

(c). $x_n := \frac{n^2}{n+1}$

$\forall n \in \mathbb{N}$, maka

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{n^2 - 1 + 1}{n+1} \\ &= n-1 + \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

Karena $\frac{1}{n+1}$ konvergen ke 0, tetapi $(n-1)$ diver-

gen, maka $\boxed{(x_n) \text{ divergen}}$

d). $x_n := \frac{2n^3+3}{n^2+1}$

$\forall n \in \mathbb{N}$, maka

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{2n^3+3}{n^2+1} = \frac{2n^3+2+1}{n^2+1} \\ &= n + \frac{1}{n^2+1} \end{aligned}$$

Karena $\frac{1}{n^2+1}$ konvergen ke 0, maka kita dapat menyim-

pulkan bahwa (x_n) konvergen ke 2, yaitu:

$$\begin{aligned} \lim x_n &= \lim \left(\frac{2n^3+3}{n^2+1} \right) \\ &= \lim \left(2 + \frac{1}{n^2+1} \right) \\ &= 2 + \lim \left(\frac{1}{n^2+1} \right) \\ &= 2 + 0 \\ &= 2 \quad [\text{Konvergen}] \end{aligned}$$

- 5). Tunjukkan bahwa barisan berikut tak konvergen

(a). 2^n

Barisan yang tidak terbatas adalah barisan yang tak konvergen. Barisan (x_n) tak terbatas jika ada $n \in \mathbb{N}$, sehingga $|x_n| > M$.

$\forall n \in \mathbb{N}$ maka $2^n > n$. Diberikan sebarang $\mathbb{R}: M > 0$. Menurut Archimedeon, terdapat $n \in \mathbb{N}$ sehingga $M < n$. Diperoleh $2^n > n > M$. Sehingga $2^n > M$. Maka 2^n tak terbatas, sehingga 2^n tak konvergen.

(b). $(-1)^n n^2$

$\forall n \in \mathbb{N}$ maka $n^2 \geq n$. Diberikan sebarang $\mathbb{R}: M > 0$. Menurut Archimedeon, maka terdapat bil. asli n , sehingga $M < n$. $|(-1)^2 n^2| = n^2 \geq n > M$. Oleh karena itu, $n \in \mathbb{N}$, sehingga $|(-1)^2 n^2| > M$. Sehingga, $(-1)^n n^2$ tidak konvergen.

- 6). Cari limit pada barisan berikut.

(a). $\lim \left(2 + \frac{1}{n} \right)^2$

$$\begin{aligned} \lim \left(\left(2 + \frac{1}{n} \right)^2 \right) &= \left(2 + \lim \frac{1}{n} \right)^2 \\ &= (2 + 0)^2 \\ &= 4 \end{aligned}$$

$$(b). \lim \left(\frac{(-1)^n}{n+2} \right)$$

$$\text{perhatikan } \frac{(-1)^n}{n+2} = \frac{\frac{(-1)^n}{n}}{1 + \frac{2}{n}}$$

$$\text{Karena } \lim \left(\frac{(-1)^n}{n} \right) = 0$$

$$\lim \left(\frac{\frac{(-1)^n}{n}}{1 + \frac{2}{n}} \right) = \frac{0}{\lim(1 + \frac{2}{n})} = 0 //$$

$$(c). \lim \left(\frac{\sqrt{n} - 1}{\sqrt{n} + 1} \right)$$

$$\text{perhatikan : } \frac{(\sqrt{n}-1)(\sqrt{n}-1)}{(\sqrt{n}+1)(\sqrt{n}-1)} = \frac{n-2\sqrt{n}+1}{n-1}$$

$$\lim \left(\frac{n-2\sqrt{n}+1}{n-1} \right) \text{ dibagi } n \text{ tiap bagian}$$

$$\Rightarrow \lim \left(\frac{1 - \frac{2\sqrt{n}}{n} + \frac{1}{n}}{1 - \frac{1}{n}} \right)$$

$$= \frac{1}{1}$$

$$= 1 //$$

$$(d). \lim \left(\frac{n+1}{n\sqrt{n}} \right)$$

$$\frac{n+1}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n\sqrt{n}}$$

$$= \lim \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) + \lim \left(\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$$

$$= 0 + 0$$

$$= 0 //$$

$$12. \text{ Jika } 0 < a < b, \text{ tentukan } \lim \left(\frac{a^{n+1} + b^{n+1}}{a^n + b^n} \right)$$

$$\Rightarrow \lim \left(\frac{a^{n+1} + b^{n+1}}{a^n + b^n} \right) \cdot \frac{1/b^n}{1/b^n}$$

$$= \lim \frac{a \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^n + b}{\left(\frac{a}{b}\right)^n + 1}$$

Karena $\lim c^n = 0$ untuk $0 < c < 1$, maka

$$= \lim \left(\frac{a^{n+1} + b^{n+1}}{a^n + b^n} \right) = \frac{a(a) + b}{0+1} = b //$$

14). Gunakan teorema apit 3.2.7 untuk menentukan limit.

$$(a). (n^{1/n^2})$$

Untuk setiap bilangan asli n , berlaku

$$1 \leq n^{1/n^2} \leq n^{1/n}$$

Karena $\lim n^{1/n^2} = 1$, maka berdasarkan teorema apit,

$$\text{berlaku : } \lim (n^{1/n^2}) = 1 //$$

$$(b). ((n!))^{1/n^2}$$

$\forall n \in \mathbb{N}$, berlaku

$$1 \leq ((n!))^{1/n^2} \leq (n^n)^{1/n^2} = n^{1/n}$$

Karena $\lim n^{1/n} = 1$, berdasarkan teorema apit, dan hubungan sebelumnya, diperoleh $\lim ((n!))^{1/n^2} = 1$

16). Gunakan teorema 3.2.11 pada barisan berikut, di mana a, b memenuhi $0 < a < 1, b > 1$.

$$a). (a^n)$$

$$\lim \left(\frac{x_{n+1}}{x_n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a^{n+1}}{a^n} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a \cdot a^n}{a^n} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} a$$

Dapat disimpulkan $\lim \left(\frac{x_{n+1}}{x_n} \right)$ ada dan konvergen.